Exercice 1 : (3 points)

Répondre par Vrai ou Faux en Justifiant votre réponse.

1) Soit n un entier naturel. On considère les deux entiers a et b définis par :
a = 3n+1 et b = 2n+3. Le pgcd de a et b est égal à 7 si et seulement si $n \equiv 2\,[7]$

2) Sachant que 2011 est premier. On a : $2013^{2011} \equiv 1\,[2011]$

3) L'espace est muni d'un repère orthonormé$(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$
Soient γ = { M(x, y, 0) tels que $y = \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$ et $1 \le x \le e$ } et S le solide obtenu par rotation de γ autour de l'axe des abscisses. Le volume de S est $\frac{\pi e}{3}$ (u.v)

4) Soit x un entier. Si $x^2 \equiv 1\,[\,9\,]$ alors $x \equiv 1\,[\,3\,]$

Exercice 2 : (5 points)

Dans le plan orienté, on considère un rectangle direct ABCD tel que AB = L et AD =1,(L > 1). Sur les segments [AB] et [CD], on place respectivement les points F et E tels que AFED soit un carré.
On suppose qu'il existe une similitude f telle que :f (A) = B, f (B) = C, f (C) = E.

1) Montrer que $L = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

2) a/ Montrer que f est une similitude directe puis déterminer l'angle et le rapport de la similitude f . On appelle I le centre de la similitude f .
b/ Caractériser la transformation f o f.
c/ En déduire que I est le point d'intersection des droites (AC) et (BE).

3) a/ Déterminer l'image de la droite (CD) par la similitude f.
b/ En déduire une construction du point E′, image du point E par la similitude f .

4) Le plan est rapporté au repère orthonormé $(A, \overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AD})$.
On appelle z l'affixe du point M, et z′ l'affixe du point M′, image du point M par f .
a/ Montrer que $z' = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\mathrm{i}z + \frac{1+\sqrt{5}}{2}$
b/ Déterminer l'image du point D par f .

5) Soit g la similitude indirecte telle que g(A) = B et g(C) = E
a/ Montrer que pour tout point M, les points f(M) et g(M) sont symétriques par rapport à la droite (BE).
b/ Déterminer alors les éléments caractéristiques de g.

Exercice 3:(3 points)

On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E) : 143x - 195y = 52
1) a/ Déterminer le pgcd de 143 et 195 et en déduire que l'équation (E) possède des solutions dans $\mathbb{Z}^2$.
b/ Sachant que (-1, -1) est une solution particulière de (E) résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E) en précisant les étapes de la résolution.

2) Soit n un entier naturel non nul et premier avec 5
Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a : $n^{4k} \equiv 1\,[\,5\,]$

3) x et y sont deux entiers naturels non nuls vérifiant $x \equiv y$ [4]

a/ Montrer que pour tout $n \in IN^*$: $n^x \equiv n^y$ [5]

b/ En déduire que pour tout n de IN^* : $n^x \equiv n^y$ [10]

4) Soit $(x , y) \in IN^2$ une solution de l'équation (E),
Montrer que pour tout $n \in IN^*$, n^x et n^y ont le même chiffre des unités.

<u>Exercice 4 :(5 points)</u>

n est un entier naturel non nul.

On considère la fonction numérique f_n définie sur IR par : $f_n(x) = x + \frac{e^{-x}}{n}$

On désigne par ($\mathcal{C}_n$) sa courbe représentative dans un repère orthonormé ($O,\vec{i},\vec{j}$)

1) a/ Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x)$

b/ Etudier la branche infinie au voisinage de $-\infty$.

c/ Montrer que la droite d'équation D : y = x est une asymptote à la courbe ($\mathcal{C}_n$) au voisinage de $+\infty$ et déterminer la position relative de la courbe ($\mathcal{C}_n$) et de la droite D.

2) a/ Donner le tableau de variations de la fonction f_n.

b/ Tracer la courbe $\mathcal{C}_3$.

3) a/ Montrer que si $n \geq 3$ alors $\frac{e}{n} < \ln(n)$

b/ Montrer que si $n \geq 3$ alors l'équation $f_n(x) = 0$ possède exactement deux solutions x_n et y_n tels que $x_n \leq -\ln(n)$ et $\frac{-e}{n} \leq y_n \leq 0$

c/ Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(y_n)$

4) Soit g la fonction définie sur IR+ par : $\begin{cases} g(x) = -1 - x\ln x \,; x > 0 \\ g(0) = -1 \end{cases}$

a/ Montrer que la fonction g est continue à droite de 0.

b/ Vérifier que pour tout $n \geq 3$; $g(\frac{-1}{x_n}) = \frac{\ln(n)}{x_n}$

c/ En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}(\frac{\ln(n)}{x_n})$

<u>Exercice 5:(4 points)</u>

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par : $\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(x) = \frac{1}{x} - \frac{\ln(1+2x)}{2x^2};\ x > 0 \end{cases}$

1) Soit $x \geq 0$, montrer que pour tout $t \in [0, x]$ on a : $\frac{1}{1+2x} \leq \frac{1}{1+2t} \leq 1$

2) Soit $x > 0$

a/ Montrer que $f(x) = \frac{2}{x^2}\int_0^x \frac{t}{1+2t}dt$

b/ Montrer que $\frac{1}{1+2x} \leq f(x) \leq 1$ et en déduire que f est continue à droite de 0

3) Montrer que pour tout $x \geq 0$; $\int_0^x \frac{2t}{1+2t}dt = \frac{x^2}{1+2x} + 2\int_0^x (\frac{t}{1+2t})^2 dt$

4) Soit $x > 0$

a/ Montrer que $f'(x) = \frac{-4}{x^3}\int_0^x (\frac{t}{1+2t})^2 dt$

b/ En utilisant 1) montrer que $\frac{-4}{3} \leq f'(x) \leq \frac{-4}{3(1+2x)^2}$

c/ Déduire que ; $\frac{-4x}{3} \leq f(x) - 1 \leq -\frac{4x}{3(1+2x)^2}$

d/ En déduire que f est dérivable à droite de 0 et préciser le nombre dérivé à droite de 0.

5) Construire la courbe C de f dans un repère orthonormé.

Exercice 1 : (3 points)

Répondre par Vrai ou Faux en Justifiant votre réponse.

1) Soit n un entier naturel. On considère les deux entiers a et b définis par :
a = 3n+1 et b = 2n+3. Le pgcd de a et b est égal à 7 si et seulement si $n \equiv 2\ [7]$

2) Sachant que 2011 est premier. On a : $2013^{2011} \equiv 1\ [2011]$

3) L'espace est muni d'un repère orthonormé$(O, \vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$
Soient γ = { M(x, y, 0) tels que $y = \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$ et $1 \le x \le e$ } et S le solide obtenu par rotation de γ autour de l'axe des abscisses. Le volume de S est $\frac{\pi e}{3}$ (u.v)

4) Soit x un entier. Si $x^2 \equiv 1\ [\,9\,]$ alors $x \equiv 1\ [\,3\,]$

Exercice 2 : (5 points)

Dans le plan orienté, on considère un rectangle direct ABCD tel que AB = L et AD =1,(L > 1).
Sur les segments [AB] et [CD], on place respectivement les points F et E tels que AFED soit un carré.
On suppose qu'il existe une similitude f telle que :f (A) = B, f (B) = C, f (C) = E.

1) Montrer que $L = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

2) a/ Montrer que f est une similitude directe puis déterminer l'angle et le rapport de la similitude f . On appelle I le centre de la similitude f .
b/ Caractériser la transformation f o f.
c/ En déduire que I est le point d'intersection des droites (AC) et (BE).

3) a/ Déterminer l'image de la droite (CD) par la similitude f.
b/ En déduire une construction du point E′, image du point E par la similitude f .

4) Le plan est rapporté au repère orthonormé $(A, \overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AD})$.
On appelle z l'affixe du point M, et z′ l'affixe du point M′, image du point M par f .
a/ Montrer que $z' = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\mathrm{i}z + \frac{1+\sqrt{5}}{2}$
b/ Déterminer l'image du point D par f .

5) Soit g la similitude indirecte telle que g(A) = B et g(C) = E
a/ Montrer que pour tout point M, les points f(M) et g(M) sont symétriques par rapport à la droite (BE).
b/ Déterminer alors les éléments caractéristiques de g.

Exercice 3:(3 points)

On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E) : 143x - 195y = 52
1) a/ Déterminer le pgcd de 143 et 195 et en déduire que l'équation (E) possède des solutions dans $\mathbb{Z}^2$.
b/ Sachant que (-1, -1) est une solution particulière de (E) résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E) en précisant les étapes de la résolution.

2) Soit n un entier naturel non nul et premier avec 5
Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a : $n^{4k} \equiv 1\ [\,5\,]$

3) x et y sont deux entiers naturels non nuls vérifiant $x \equiv y\ [4]$

a/ Montrer que pour tout $n \in IN^*$: $n^x \equiv n^y\ [5]$

b/ En déduire que pour tout n de IN^* : $n^x \equiv n^y\ [10]$

4) Soit $(x , y) \in IN^2$ une solution de l'équation (E),
Montrer que pour tout $n \in IN^*$, n^x et n^y ont le même chiffre des unités.

Exercice 4 :(5 points)

n est un entier naturel non nul.

On considère la fonction numérique f_n définie sur IR par : $f_n(x) = x + \frac{e^{-x}}{n}$

On désigne par ($\mathscr{C}_n$) sa courbe représentative dans un repère orthonormé ($O,\vec{i},\vec{j}$)

1) a/ Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x)$

b/ Etudier la branche infinie au voisinage de $-\infty$.

c/ Montrer que la droite d'équation D : y = x est une asymptote à la courbe ($\mathscr{C}_n$) au voisinage de $+\infty$ et déterminer la position relative de la courbe ($\mathscr{C}_n$) et de la droite D.

2) a/ Donner le tableau de variations de la fonction f_n.

b/ Tracer la courbe $\mathscr{C}_3$.

3) a/ Montrer que si $n \geq 3$ alors $\frac{e}{n} < \ln(n)$

b/ Montrer que si $n \geq 3$ alors l'équation $f_n(x) = 0$ possède exactement deux solutions x_n et y_n tels que $x_n \leq -\ln(n)$ et $\frac{-e}{n} \leq y_n \leq 0$

c/ Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(y_n)$

4) Soit g la fonction définie sur IR+ par : $\begin{cases} g(x) = -1 - x\ln x\ ; x > 0 \\ g(0) = -1 \end{cases}$

a/ Montrer que la fonction g est continue à droite de 0.

b/ Vérifier que pour tout $n \geq 3$; $g\left(\frac{-1}{x_n}\right) = \frac{\ln(n)}{x_n}$

c/ En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{\ln(n)}{x_n}\right)$

Exercice 5:(4 points)

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par : $\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(x) = \frac{1}{x} - \frac{\ln(1+2x)}{2x^2};\ \ x > 0 \end{cases}$

1) Soit $x \geq 0$, montrer que pour tout $t \in [0, x]$ on a : $\frac{1}{1+2x} \leq \frac{1}{1+2t} \leq 1$

2) Soit $x > 0$

a/ Montrer que $f(x) = \frac{2}{x^2}\int_0^x \frac{t}{1+2t}dt$

b/ Montrer que $\frac{1}{1+2x} \leq f(x) \leq 1$ et en déduire que f est continue à droite de 0

3) Montrer que pour tout $x \geq 0$; $\int_0^x \frac{2t}{1+2t}dt = \frac{x^2}{1+2x} + 2\int_0^x \left(\frac{t}{1+2t}\right)^2 dt$

4) Soit $x > 0$

a/ Montrer que $f'(x) = \frac{-4}{x^3}\int_0^x \left(\frac{t}{1+2t}\right)^2 dt$

b/ En utilisant 1) montrer que $\frac{-4}{3} \leq f'(x) \leq \frac{-4}{3(1+2x)^2}$

c/ Déduire que ; $\frac{-4x}{3} \leq f(x) - 1 \leq -\frac{4x}{3(1+2x)^2}$

d/ En déduire que f est dérivable à droite de 0 et préciser le nombre dérivé à droite de 0.

5) Construire la courbe C de f dans un repère orthonormé.

LATRACH Synthèse II 2012/2013 4ème MATHS

Exercice 1.

1) $a = 3n+1$, $b = 2n+3$.

$7 = a \wedge b$

$= (2n+3) \wedge (n-2)$; $3n+1 = b+n-2$

$= (n-2) \wedge 7$; $2n+3 = 2(n-2)+7$

$a \wedge b = 7 \iff (n-2) \wedge 7 = 7$

$\iff n-2 \equiv 0 \; [7]$

$\iff n \equiv 2 \; [7]$

ccl: VRAI

2/ $\begin{cases} 2011 \text{ premier} \\ 2011 \text{ ne divise pas } 2013 \end{cases}$

$\overset{P.T.F}{\Longrightarrow} 2013^{2010} \equiv 1 \; [2011]$

$\Rightarrow 2013^{2011} \equiv 2013 \; [2011]$

$\Rightarrow 2013^{2011} \equiv 2 \; [2011]$

ccl: FAUX.

3/ $V = \pi \int_1^e \frac{\ln^2 x}{x} dx \cdot (uv)$

$= \frac{\pi}{3} \left[\ln^3(x) \right]_1^e$

$= \frac{\pi}{3} \; u.v$

ccl: FAUX

4/ $x^2 \equiv 1 \; [9]$

$\Rightarrow x^2 = 1 + 9k, \; k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow x^2 = 1 + 3k'$

$\Rightarrow x^2 \equiv 1 \; [3]$

$\Rightarrow (x-1)(3+1) \equiv 0 \; [3]$

$\Rightarrow x+1 \equiv 0 \; [3]$ car 3 premier
ou $x - 1 \equiv 0 \; [3]$

$\Rightarrow x \equiv 1 \, [3]$ ou $x \equiv 2 \, [3]$

ccl: FAUX

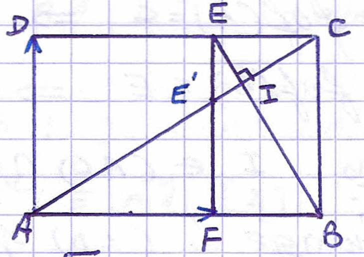
Qu	1	2	3	4
Rép	V	F	F	F

Exercice 2.

$f(A) = B$

$f(B) = C$

$f(C) = E$



1) $L = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

ĉ La similitude conserve les rapports des distances

Alors: $\frac{BC}{AB} = \frac{CE}{BC}$

$\Rightarrow BC^2 = AB \cdot CE$

$\Rightarrow 1 = L \cdot (L-1)$

$\Rightarrow L^2 - L - 1 = 0$, $\Delta = 5$

$\Rightarrow L = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ou $L = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ imp

ccl: $L = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

2/ a/ Angle et Rapport de f.

$\begin{cases} \cdot \; f \text{ est une similitude} \\ \cdot \; (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BE}}) \; (2\pi) \end{cases}$

Alors f est une similitude directe

de Rapport: $\frac{BC}{AB} = \frac{1}{L} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

d'angle $\alpha \equiv (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}}) \; (2\pi)$

$\equiv \frac{\pi}{2} \; [2\pi]$

ccl. f est une similitude directe de rapport $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

b) Caractéristiques de $f \circ f$.

$f = S(I, k, \frac{\pi}{2})$, $k = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

Alors $f \circ f = S(I, k^2, \pi)$

$= h(I, k^2) \circ R(I, \pi)$

$= h(I, -k^2)$

ccl: $f \circ f = h_{(I, -k^2)}$

c/ Construction du centre I de f.

on a: $\begin{cases} f\circ f(A)=C \Rightarrow I\in(AC) \\ f\circ f(B)=E \Rightarrow I\in(BE) \end{cases}$

Alors $I\in(AC)\cap(BE)$.

3) a) Image de (CD) par f.

. f((CD)) est la perpendiculaire à la droite (CD) passant par E

D'où $f((CD))=(EF)$

b) Construction du pt $E'=f(E)$

$\begin{cases} E\in(DC) \Rightarrow E'\in(EF) \\ f\circ f(C)=E' \Rightarrow E'\in(IC) \end{cases}$

Alors $E'\in(EF)\cap(AC)$

4) a) Expression complexe de f.

$f: z'=az+b$ où $\begin{vmatrix} a=ke^{i\frac{\pi}{2}} \\ a=ik \end{vmatrix}$

$f(A)=B \Rightarrow L=b$

D'où $f: z'=\frac{\sqrt5-1}{2}iz+\frac{1+\sqrt5}{2}$

b) Image du pt D par f.

$z_D=2i$; $D'=f(D)$

Alors $z_{D'}=\frac{-\sqrt5+1}{2}+\frac{1+\sqrt5}{2}$
$=1$

D'où $f(D)=F$.

5) f(M) et g(M) symétrique % à (BE).

$\begin{cases} g\circ f^{-1}(B)=B \\ g\circ f^{-1}(E)=E \\ g\circ f^{-1} \text{ antidéplacement.} \end{cases}$

$\Rightarrow g\circ f^{-1}=S_{BE}$

$\Rightarrow g=S_{BE}\circ f$

ccl: $\forall M\in P$ on a:

$g(M)=S_{BE}(f(M))$

b) Eléments caractéristique de g.

on a: $g=S_{BE}\circ f$.

$\begin{cases} \text{. g est de rapport } k=\frac{\sqrt5-1}{2}\neq1 \\ \text{. } g(I)=I \\ \text{. } g(A)=B \end{cases}$

Alors g est une similitude indirecte de rapport $\frac{\sqrt5-1}{2}$, de centre I et d'axe Δ = porte bissectrice intérieur de $(\vec{IA},\vec{DB})$.

Exercice 3.

1) a) * pgcd(195, 143).

. $195\wedge143=143\wedge52$
$=52\wedge39$
$=39\wedge13$
$=13$ car 13 divise 39

ccl: $195\wedge143=13$

*(E) possède des solutions.

$195\wedge143=13$
$\Rightarrow$ 13 divise $-195y+143x$
$\Rightarrow$ 13 divise 52 (vérifié)
$\Rightarrow$ (E) admet des solutions.

ou bien.

$\begin{cases} (E): 143x-195y=52 \\ 143\wedge195=13 \\ 13 \text{ divise } 52 \end{cases}$

Alors (E) admet des solutions dans $\mathbb{Z}^2$

b) Résolution de (E)

. $(-1,-1)$ solution de (E)

. (x,y) sol dans $\mathbb{Z}^2$

$\Leftrightarrow 143x-195y=143(-1)-195(-1)$

$\Leftrightarrow 143(x+1) = 195(y+1)$

$\Leftrightarrow 11(x+1) = 15(y+1)$ (1)

$\Rightarrow$ 11 divise $15(y+1)$
$11 \wedge 15 = 1$

GAUSS
$\Rightarrow$ 11 divise $(y+1)$

$\Rightarrow$ Il existe $k \in \mathbb{Z}$ tq $y+1 = 11k$

. On remplace dans (1)

$11(x+1) = 15 \cdot 11k$

$\Rightarrow x+1 = 15k$

. On vérifie.

$11(15k-1) - 15(11k-1) = 4$

$\Rightarrow 11x - 15y = 4$

$\Rightarrow 11.13x - 15.13y = 52$

$\Rightarrow (x, y)$ sol de (E_1)

. ccl $S_{\mathbb{Z}^2} = \{(-1+15k, -1+11k), k\in\mathbb{Z}\}$

2) $n^{4k} \equiv 1 [5]$?

. $n \wedge 5 = 1$
. 5 premier } $\Rightarrow n^4 \equiv 1 [5]$

— Alors $n^{4k} \equiv 1 [5]$, $k \in \mathbb{N}$

3) a) $n^x \equiv n^y [5]$?

1er cas : . $n \wedge 5 = 1 \Rightarrow n^{4k} \equiv 1 (5)$

. $x \equiv y [4] \Leftrightarrow x = 4k+y$, $k\in\mathbb{N}$

— Alors $n^x \equiv n^{4k+y} [5]$

$\Rightarrow n^x \equiv n^{4k} \cdot n^y (5)$

— Alors $n^x \equiv n^y [5]$

2ème cas $n \equiv 0 [5]$

$\Rightarrow n^x \equiv 0 [5]$
et $n^y \equiv 0 [5]$

— Alors $n^x \equiv n^y [5]$

ccl : $n^x \equiv n^y [5]$; $\forall n \in \mathbb{N}^*$

b) $n^x \equiv n^y [10]$?

. $n^x \equiv n^y [5]$ (d'après a)

. $\begin{cases} n \equiv 1 [2] \Rightarrow n^x \equiv n^y [2] \\ n \equiv 0 [2] \Rightarrow n^x \equiv n^y [2] \end{cases}$

$\Rightarrow n^x \equiv n^y [2]$

D'où $\begin{cases} n^x \equiv n^y [5] \\ n^x \equiv n^y [2] \\ 2 \wedge 5 = 1 \end{cases}$

— Alors $n^x \equiv n^y [10]$
si $x \equiv y [4]$

4)
(x, y) sol de $(E) \Rightarrow n^x \equiv n^y (10)$

on a : $x = -1 + 15k$
$y = -1 + 11k$

$\Rightarrow x - y = 4k$

$\Rightarrow x \equiv y [4]$

— Alors $n^x \equiv n^y [10]$

ccl : n^x et n^y ont le même chiffre d'unité.

Exercice 4 :

1) a) $\lim_{x\to-\infty} f_n(x)$?

. $\lim_{x\to-\infty} f_n(x) = \lim_{-\infty} x\left(1 + \frac{1}{nxe^x}\right)$

$= +\infty$ car $\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0^-$

b) Branche infinie au $V(-\infty)$

$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \left(1 + \frac{1}{nxe^x}\right)$

$= -\infty$

— Alors $\mathcal{C}_n$ a une B I de dir $(O, \vec{j})$ au voisinage de $(-\infty)$

c) * $D : y = x$ Asymptote à $\mathcal{C}_n$ au $V_{+\infty}$

$\lim_{x\to+\infty} (f_n(x) - x) = \lim_{+\infty} \left(\frac{e^{-x}}{n}\right)$

$= 0$

— Alors $D : y = x$ Asymptote au $V_{+\infty}$

* Position de C_n /. à D:

Comme $\begin{cases} f_n(x) - x = \frac{e^{-x}}{n} \\ \frac{e^{-x}}{n} > 0 \ ; \ \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$

— Alors C_n st toujours au dessus de D.

2) Tableau de variation de f_n:

. f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$

. $f_n'(x) = \frac{n - e^{-x}}{n} = \frac{ne^{x} - 1}{ne^{x}}$

x	$-\infty$		$-\ln(n)$		$+\infty$
$f_n'(x)$		$-$	0	$+$	
$f_n(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$1-\ln(n)$	$\nearrow$	$+\infty$

$f_n'(x) = 0 \iff e^{x} = \frac{1}{n} \iff x = -\ln(n)$

3) a/ $n \geq 3$ Alors $\frac{e}{n} < \ln(n)$

$\begin{cases} . \ n \geq 3 \Rightarrow \ln(n) > 1 \\ . \ \frac{e}{n} \leq \frac{e}{3} < 1 \end{cases}$

$\Rightarrow \frac{e}{n} < 1 < \ln(n)$

ccl: $\frac{e}{n} < \ln(n)$

b/ Existence de x_n et y_n ; $n \geq 3$.

* $\begin{cases} . \ f_n \text{ continue sur }]-\infty, -\ln(n)] = I \\ . \ f_n \text{ st décroissante sur } I \\ . \ 0 \in f_n(]-\infty, -\ln(n)]) \end{cases}$

— Alors Il existe unique $x_n < -\ln(n)$ telque $f_n(x_n) = 0$.

* $\frac{e}{n} < \ln(n) \Rightarrow -\frac{e}{n} > -\ln(n)$

$\begin{cases} . \ f_n \text{ continue sur } [-\frac{e}{n}, 0] \\ . \ f_n \text{ st croissante sur } [-\frac{e}{n}, 0] \\ . \ f_n(0) \cdot f_n(-\frac{e}{n}) < 0 \end{cases}$

$f_n(-e/n) = \frac{e^{\frac{e}{n}} - e}{n} < 0 \ ; \ (\frac{e}{n} < 1)$

— Alors Il existe unique $-\frac{e}{n} < y_n < 0$ tq $f_n(y_n) = 0$

ccl. l'éq $f_n(x) = 0$ admet deux sol x_n et y_n tq $x_n \leq -\ln(n)$ et $-\frac{e}{n} < y_n < 0$

c/ Calcul $\lim(x_n)$ et $\lim(y_n)$

. $\begin{cases} x_n < -\ln(n) \\ \lim_{n \to +\infty} (-\ln(n)) = -\infty \end{cases}$

— Alors $\lim_{n \to +\infty} (x_n) = -\infty$

$\begin{cases} . \ -\frac{e}{n} \leq y_n \leq 0 \Rightarrow |y_n| \leq \frac{e}{n} \\ . \ \lim \frac{e}{n} = 0 \end{cases}$

— Alors $\lim(y_n) = 0$

4) a/ Continuité de g en 0^+.

$\lim_{x \to 0^+} g(x) = \lim_{x \to 0^+} (-1 - x\ln x)$
$= -1$
$= g(0)$

— Alors g continue en 0^+.

b/ $n \geq 3$, $g(-\frac{1}{x_n}) = \frac{\ln(n)}{x_n}$.

$g(-\frac{1}{x_n}) = -1 + \frac{1}{x_n} \ln(\frac{-1}{x_n})$
$= -1 - \frac{1}{x_n} \ln(-x_n)$

OR $f_n(x_n) = 0 \iff -x_n = \frac{e^{-x_n}}{n}$

— Alors $g(-\frac{1}{x_n}) = -1 - \frac{1}{x_n} \ln(\frac{e^{-x_n}}{n})$
$= -1 - \frac{1}{x_n}(\ln(e^{-x_n}) - \ln(n))$
$= -1 + 1 + \frac{\ln(n)}{x_n}$

ccl: $g(-\frac{1}{x_n}) = \frac{\ln(n)}{x_n}$; $n \geq 3$.

c/ $\lim \frac{\ln(n)}{x_n}$?

$\begin{cases} . \ \lim_{n \to +\infty} (-\frac{1}{x_n}) = 0 \\ . \ g \text{ continue en } 0^+ \end{cases}$

— Alors $\lim_{n \to +\infty} g(-\frac{1}{x_n}) = g(0)$

— Alors $\lim(\frac{\ln(n)}{x_n}) = -1$

ccl: $\lim_{n \to +\infty} \frac{\ln(n)}{x_n} = -1$.

Exercice 5.

1) $x \geq 0$; $\frac{1}{1+2x} \leq \frac{1}{1+2t} \leq 1$?

$0 \leq t \leq x \Rightarrow 1 \leq 1+2t \leq 1+2x$

Alors $\frac{1}{1+2x} \leq \frac{1}{1+2t} \leq 1$.

2) a) $x>0$; $f(x) = \frac{2}{x^2}\int_0^x \frac{t}{1+2t}\,dt$.

$\frac{2}{x^2}\int_0^x \frac{t}{1+2t}\,dt = \frac{1}{x^2}\int_0^x \frac{2t+1-1}{1+2t}\,dt$

$= \frac{1}{x^2}\int_0^x 1 - \frac{1}{1+2t}\,dt$

$= \frac{1}{x^2}\left[x - \frac{1}{2}\ln(1+2x)\right]$

$= \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2}\ln(1+2x)$

$= f(x)$.

ccl: $f(x) = \frac{2}{x^2}\int_0^x \frac{t}{1+2t}\,dt$, $x>0$

b) * $\frac{1}{1+2x} \leq f(x) \leq 1$

on a: $\frac{1}{1+2x} \leq \frac{1}{1+2t} \leq 1$

$\Rightarrow \frac{t}{1+2x} \leq \frac{t}{1+2t} \leq t$

Comme: $t \longmapsto \frac{t}{1+2x}$, $t \longmapsto \frac{t}{1+2t}$, $t \longmapsto t$ sont c sur $[0,x]$

Alors $\int_0^x \frac{t}{1+2x}\,dt \leq \int_0^x \frac{t}{1+2t}\,dt \leq \int_0^x t\,dt$

$\Rightarrow \frac{x^2}{2(1+2x)} \leq \frac{x^2}{2} f(x) \leq \frac{x^2}{2}$

$\Rightarrow \frac{1}{1+2x} \leq f(x) \leq 1$.

* Continuité de f en 0^+

$\begin{cases} \frac{1}{1+2x} \leq f(x) \leq 1 \\ \lim\limits_{0^+} \frac{1}{1+2x} = 1 = \lim 1 \end{cases}$

$\Rightarrow \lim\limits_{0^+} f(x) = 1 = f(0)$

ccl: f est continue en 0^+

3). $x \geq 0$; $\int_0^x \frac{2t}{1+2t}\,dt = \frac{x^2}{1+2x} + 2\int_0^x \left(\frac{t}{1+2t}\right)^2 dt$

on pose $u'(t) = 2t \longrightarrow u(t) = t^2$

$v(t) = \frac{1}{1+2t} \longrightarrow v'(t) = \frac{-2}{(1+2t)^2}$

Alors $\int_0^x \frac{2t}{1+2t}\,dt = \left[\frac{t^2}{1+2t}\right]_0^x + 2\int_0^x \left(\frac{t}{1+2t}\right)^2 dt$

ccl: $\int_0^x \frac{2t}{1+2t}\,dt = \frac{x^2}{1+2x} + 2\int_0^x \left(\frac{t}{1+2t}\right)^2 dt$.

4) a) $x>0$; $f'(x) = -\frac{4}{x^3}\int_0^x \left(\frac{t}{1+2t}\right)^2 dt$.

$\begin{cases} x \longmapsto \frac{2}{x^2} \text{ est d sur }]0,+\infty[\\ x \longmapsto \int_0^x \frac{t}{1+2t}\,dt \text{ est d sur }]0,+\infty[\end{cases}$

Alors f est dérivable sur $]0,+\infty[$

et on a: $f'(x) = \frac{-4}{x^3}\int_0^x \frac{t}{1+2t}\,dt + \frac{2}{x(1+2x)}$

$= \frac{-2}{x^3}\left[\frac{x^2}{1+2x} + 2\int_0^x \left(\frac{t}{1+2t}\right)^2 dt\right] + \frac{2}{x(1+2x)}$

$= \frac{-2}{x(1+2x)} - \frac{4}{x^3}\int_0^x \left(\frac{t}{1+2t}\right)^2 dt + \frac{2}{x(1+2x)}$

$\Rightarrow f'(x) = -\frac{4}{x^3}\int_0^x \left(\frac{t}{1+2t}\right)^2 dt$.

b) $-\frac{4}{3} \leq f'(x) \leq \frac{-4}{3(1+2x)^2}$?

on a: $\frac{1}{1+2x} \leq \frac{1}{1+2t} \leq 1$

$\Rightarrow \frac{t^2}{(1+2x)^2} \leq \left(\frac{t}{1+2t}\right)^2 \leq t^2$

$\Rightarrow \int_0^x \frac{t^2}{(1+2x)^2}\,dt \leq \int_0^x \left(\frac{t}{1+2t}\right)^2 dt \leq \int_0^x t^2\,dt$

$\Rightarrow \frac{x^3}{3(1+2x)^2} \leq \frac{-x^3}{4} f'(x) \leq \frac{x^3}{3}$

$\Rightarrow \frac{-4}{3} \leq f'(x) \leq \frac{-4}{3(1+2x)^2}$

c) $-\frac{4}{3} \leq f'(t) \leq \frac{-4}{3(1+2x)^2}$; $t \in [0,x]$

$\Rightarrow \int_0^x -\frac{4}{3}\,dt \leq \int_0^x f'(t)\,dt \leq -\int_0^x \frac{4}{3(1+2x)^2}\,dt$

$\Rightarrow -\frac{4}{3}x \leq f(x) - 1 \leq \frac{-4x}{3(1+2x)^2}$

d) $\begin{cases} -\frac{4}{3} \leq \frac{f(x)-f(0)}{x} \leq \frac{-4}{3(1+2x)^2} \\ \lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = -\frac{4}{3} \end{cases}$

Alors f est d en 0^+ et $f'_d(0) = -\frac{4}{3}$

5)

x	0	
$f'(x)$	$-\frac{4}{3}$	$-$
$f(x)$	1	$\searrow 0$